金融風險管理季刊
民95，第二卷，第二期，31-46

利率風險與銀行的最適資金缺口*

Interest Rate Risk and Optimal Gap of Bank

杜建衡**
Chien-Heng Tu
國立高雄應用科技大學
National Kaohsiung University of Applied sciences

摘要

傳統的銀行資金缺口管理模型均假定銀行爲風險中立者，若要完全規避利率波動風險，銀行必須盡可能的讓其資金缺口(Maturity Gap)或存續期間缺口(Duration Gap)趨近於零；銀行若願承擔部分風險，則應做好利率趨勢預測，以決定資金缺口爲正或負，至於缺口金額的多寡？則很少有文獻提及，換句話說，在利率風險管理上應有一決定最佳的資金缺口模型，讓決策者有所依循，本研究的目的就是希望能導出銀行的最適資金缺口，並探討該最適資金缺口的相關性質，以做爲銀行在面對利率風險時的決策依據。

關鍵詞：最適資金缺口、利率風險、風險規避、資產負債管理。

Abstract

Traditional maturity gap model for banks advocates a zero maturity (or duration) gap for optimally hedging any interest rate risk under the premise that all banks are risk neutral. However, if banks are risk averse, the zero maturity gap is no longer the sole criterion for the banks to follow. Instead, the banks have to take into account the trend of future interest rates in order to optimally hedge their interest rate risk and may result in a positive or negative gap in the end. This article is intended to provide a theoretical underpinning for a risk-averse bank to decide his optimal maturity gap. Some relevant characteristics that affect the determination of maturity gap are also examined.

Key Words: Optimal Gap, Interest Rate Risk, Risk Aversion, Asset and Liability Management.

---

* 本文承蒙三位匿名審稿者的細心審閱，並提供寶貴的建議，使本文內容更爲充實，特此致謝。

** 作者通訊：杜建衡，高雄市807三民區建工路415號高雄應用科技大學金融系副教授，TEL:886-7-3814526#6310，Email: heng@cc.kuas.edu.tw

1. 緒論

傳統的銀行資金缺口管理模式均假定銀行爲風險中立者，若要完全規避利率波動風險，銀行必須盡可能的讓其資金缺口(Maturity Gap)或存續期間缺口 (Duration Gap)趨近於零；銀行若願承擔部分風險，則應做好利率趨勢預測，以決定資金缺口爲正或負，問題是缺口金額的大小，傳統的管理模式無法提出一明確的決策標準，讓管理者有所依循。Wetmore and Brick (1990)曾設計一風險規避之市場價值最適化模型(market value optimization model)，並提出最適資金缺口觀念，然而遺憾的是該模型並未對最適缺口之推導與相關性質有深刻的討論。本文的研究目的就是希望能導出一銀行最適資金缺口，並探討其相關性質，以做爲決策者在面對利率風險時的依據。

過去有關利率風險與銀行資金缺口管理的文獻大多以存續期間缺口的研究爲主，例如：Bierwag (1977)、Cooper (1977)、Bierwag and Kaufman (1985)、提出各種不同的利率期限結構下的存續期間模型；Grove (1974)、Prisman and Tian (1993)則探討風險規避者的免疫(immunization)策略是否爲最適的問題，基本上這些研究已有相當完整的基礎。在實證方面，早期如Flannery and James (1984 a, b)，近期如Hirtle (1997)、Ahmed, Beatty, and Bettinghaus (2004)等均驗證銀行資金缺口與利率風險有密切關係，並且缺口大小與銀行的股價報酬率或淨利息收入成正比，換句話說，資金缺口管理仍是銀行的資產負債管理中重要的一環，然而這些文章並未提出其理論基礎。Allen and Santomero (1998)在其有關金融機構理論回顧的文章中，從近年來金融中介機構的發展趨勢來看，特別強調金融機構從事風險管理的理論基礎建立的重要性。

根據Ahmed, Beatty, and Takeda (1997)的實證顯示，銀行利率風險管理的直接目標是淨利息收入(net interest income)，資本市值僅係間接受到影響，因此本文捨棄從Stone (1974)、Lloydand Shick (1977)、Lynge and Zumwalt (1980)，與Flannery and James (1984 a, b) 以來以銀行資本淨值爲目標之相關研究，而以銀行的淨利息收入爲研究對象，因此本文將以Parkin (1970)、Pyle (1971)的風險規避銀行模型爲基本架構，探討銀行在追求淨利息收入(或利潤)之預期效用極大的同時，如何決定其最適資金缺口，以及該缺口的相關性質。本文的架構除第1節爲緒論，第4節爲結論外，其餘的內容如下：

(一) 第1節設立一簡單的風險規避模型，導出風險規避銀行的最適資金缺口，並探討最適缺口的規避風險性質。

(二) 第3節設立一利率連動模型，透過指標利率與各資產與負債利率之線型關係，導出更一般化的最適資金缺口—βGAP，並進一步研究βGAP的相關性質。

2. 簡單模型

假定一風險規避銀行將其資產分爲利率敏感資產(RSA)A_1與利率不敏感資產(NRSA)A_2，負債亦區分爲利率敏感負債(RSL)L_1與利率不敏感負債(NRSL)L_2，令資產A_1與A_2的報酬率分別爲R_{1a}與R_{2a}，負債L_1與L_2的報酬率分別爲R_{1l}與R_{2l}，在一短期的分析期間，R_{1a}與R_{1l}爲隨機變數，隨市場利率而變動，而R_{2a}與R_{2l}則爲固定常數，不受市場利率波動所影響。[1]由於本文較專注於市場利率風險之討論，因此專注於銀行的淨利息收入之討論，並假設最適倒帳風險貼水已隱含於利率之中並不加以討論，風險規避銀行所追求之目標爲其淨利息收入π之預期效用極大，其效用函數爲：$u(\pi)$，且$u'(\pi)>0$，$u''(\pi)<0$。由於本文爲一短期分析，假定銀行帳面的資產總值A與資本淨值K爲固定常數，則極大化模型問題可以寫成：

$$\max_{A_1, L_1} E[u(\pi)] \tag{1}$$

受限於

$$\pi = R_{1a}A_1 + R_{2a}A_2 - R_{1l}L_1 - R_{2l}L_2 \tag{2}$$

$$A_1 + A_2 = \mathrm{A} = L_1 + L_2 + K \tag{3}$$

其一階條件爲：

$$E\{u'(\pi)\cdot(R_{1a} - R_{2a})\} = 0 \tag{4}$$

$$E\{u'(\pi)\cdot(R_{2l} - R_{1l})\} = 0 \tag{5}$$

比照Pyle (1971)之證明，[2]風險規避銀行之存活的條件爲：$\Delta R_a = E(R_{1a}) - R_{2a} > 0$，$\Delta R_l = R_{2l} - E(R_{1l}) > 0$，換句話說，RSA利率應大於NRSA利率，其利差 ΔR_a 義爲資產的利率風險貼水，同理，ΔR_l 義爲負債的利率風險貼水。假定效用函數爲指數型態(exponential utility function)，且淨利息收入函數隸屬常態分配，則淨利息收入之預期效用函數可以寫成：

$$E[u(\pi)] = E[\pi] - \frac{z}{2}\sigma^2(\pi)$$

其中，

$$\sigma^2[\pi] = [\sigma_{1a}^2 A_1^2 + \sigma_{1l}^2 L_1^2 - 2\sigma_{1a1l} A_1 L_1] \tag{6}$$

$z\,(>0)$ ＝爲絕對風險規避係數(coefficient of absolute risk aversion)

σ_{1a}^2 ＝RSA利率之變異數

σ_{1l}^2 ＝RSL利率之變異數

---

1 爲方便討論，本文假定利率敏感或不敏感資產的信用風險完全相同，故信用風險可忽略不計。

2 Pyle (1971)的模型雖與本文略有不同，但其證明金融機構存在的條件，完全可以應用於本文。

σ_{1a1l}＝RSA利率與RSL利率之共變數

則(4)(5)可以寫成爲：

$$E(R_{1a}) - R_{2a} - z\sigma_{1a}^2 A_1 + z\sigma_{1a1l} L_1 = 0 \quad (7)$$

$$-E(R_{1l}) + R_{2l} + z\sigma_{1a1l} A_1 - z\sigma_{1l}^2 L_1 = 0 \quad (8)$$

將(7)(8)式求聯立解可得：

$$A_1^* = \frac{\left(E(R_{1a}) - R_{2a}\right)\sigma_{1l}^2 - \left(E(R_{1l}) - R_{2l}\right)\sigma_{1a1l}}{z(\sigma_{1a}^2\sigma_{1l}^2 - \sigma_{1a1l}^2)} \quad (9)$$

$$L_1^* = \frac{-\left(E(R_{1l}) - R_{2l}\right)\sigma_{1a}^2 + \left(E(R_{1a}) - R_{2a}\right)\sigma_{1a1l}}{z(\sigma_{1a}^2\sigma_{1l}^2 - \sigma_{1a1l}^2)} \quad (10)$$

A_1^*與L_1^*爲風險規避銀行之最適RSA與最適RSL，將二者代入目標函數即可得銀行淨利息收入之預期效用極大値，也就是說，在一定風險下，A_1^*與L_1^*可爲銀行帶來最大的預期淨利息收入，或在一定的預期淨利息收入下，A_1^*與L_1^*可爲銀行帶來最小的利率風險。在此我們將A_1^*減去L_1^*定義爲銀行的最適資金缺口 (Optimal Dollar Gap, OGAP)，二者相除可視爲銀行的最適資金缺口率(Optimal Gap Ratio)，因此OGAP也具有上述預期淨利息收入極大與利率風險極小的性質。

由於A_1^*與L_1^*均不可能小於零，故最適資金缺口是否如傳統看法(借短貸長) 應爲負値，以及最適資金缺口如何受到外生變數的影響，均有待進一步討論，下述命題則提供這些問題的部分答案，相關數學證明可參閱附錄。

命題一：當 $\rho_{1a1l} = 1$ $\sigma_{1a}^2 = \sigma_{1l}^2$ 時，$OGAP = 0$。當 $\rho_{1a1l} \neq 1$ OGAP $\gtreqless 0$之充要條件爲：$\sigma_{1l}^2 \gtreqless \sigma_{1a}^2$ 且 $\Delta R_a \gtreqless \Delta R_l$

命題一中的ρ_{1a1l} RSA利率與RSL利率之相關係數，即：$\rho_{1a1l} = \sigma_{1a1l}/(\sigma_{1a}\sigma_{1l})$，一般而言，利率大多呈一致的方向變動，故假定 $\rho_{1a1l} > 0$題一的討論可分成兩部分，當 $\rho_{1a1l} = 1$最適$\sigma_{1a}^2 = \sigma_{1l}^2$ 資金缺口應該爲零，也就是說，當RSA利率與RSL利率完全無差異，則銀行在決定最適資產與負債結構時，應將最適資金缺口調整爲零。這與傳統的保守策略，要求銀行將資金缺口縮減爲零以規避利率風險非常類似，因爲將 $\rho_{1a1l} = 1$ $\sigma_{1a}^2 = \sigma_{1l}^2$ $A_1 = L_1$代入(6)式，亦可得出銀行的利率風險正好爲零的結論。但不同的是，OGAP＝0的決定，是在一定條件下銀行的最佳選擇。

其次是當 $\rho_{1a1l} \neq 1$資金缺口爲正、爲負或爲零的條件，由命題一證明可知，當資產的利率風險貼水大於負債的利率風險貼水，且資產的利率變異小於負債的利率變異，則最適RSA應大於RSL，也就是OGAP應大於零。反之，當資產的利率風險貼水小於負債的利率風險貼水，且資產的利率變異大於負債的利率變異，

則OGAP應小於零。但當資產的利率風險貼水等於負債的利率風險貼水，且資產的利率變異亦等於負債的利率變異，則銀行的最適決策為OGAP＝0，此處的零缺口政策與 $\rho_{1a1l}=1$ 時略有不同，由於 $\rho_{1a1l}\neq 1$ 銀行的利率風險不等於零，因此銀行亦可能在負擔利率風險的情況下採取零缺口政策。

關於最適資金缺口的比較靜態分析，從附錄之(A1)式可知：絕對風險規避係數與最適資金缺口成反比，也就是說，當決策者越規避風險時，其最適資金的缺口就越小，反之，就越大。銀行的規模*(A)*與資本淨值*(K)*，則與最適資金的缺口無關。以下命題二到命題四將進一步討論利率的期望值與其波動度(標準差)對最適資金缺口之影響。

如果將(9)及(10)兩式代入(4)式，可得銀行淨利息收入之預期效用函數如下：

$$\begin{aligned}\max_{A_i,L_i} E[u(\pi)] &= E(\pi^*)-\frac{z}{2}\sigma^2(\pi^*)\\ &= G(E(R_{1a}),R_{2a},E(R_{1l}),R_{2l},\\ &\qquad \sigma_{1a}^2,\sigma_{1l}^2,\sigma_{1a1l},A,K,z)\\ &= G(E,h) \qquad (11)\end{aligned}$$

其中，

$$E=(E(R_{1a}),R_{2a},E(R_{1l}),R_{2l})$$

$$h=(\sigma_{1a}^2,\sigma_{1l}^2,\sigma_{1a1l},A,K,Z)$$

命題二：*G(E, h)*為E之convex函數。

由命題二的證明可知，經過極大化的淨利息收入之預期值，應大於風險中立下的淨利息收入期望值，也就是說，當敏感資產或敏感負債利率變動時，銀行經營者可透過資產與負債之最佳化配置，使其淨利息收入之預期值達到極大。由附錄之命題二的證明亦可延伸至：E(π*)為E的convex函數。因此由E(π*)對利率的一階導數可知：銀行最大預期淨利息收入與各資產與其利率成正比 $(\partial E(\pi^*)/\partial E(R_{ia})=A_i>0)$、最大預期淨利息收入與各負債利率成反比 $(\partial E(\pi^*)/\partial E(R_{il})=-L_i<0)$ E(π*)對利率的二階導數可知：銀行各資產之最適配置與其利率成正比 $(\partial A_i/\partial E(R_{ia})>0)$，各負債之最適配置與其利率成反比 $(\partial L_i/\partial E(R_{il})<0)$。同理，由 $\sigma^2(\pi^*)$ 敏感性資產及負債之利率變異數的一階導數可知：銀行淨利息收入之最小風險與RSA利率之變異數成正比 $(\partial\sigma^2(\pi^*)/\partial\sigma_{1a}^2=A_1^2>0)$、與RSL利率成正比 $(\partial\sigma^2(\pi^*)/\partial\sigma_{1l}^2=L_1^2>0)$、與RSA利率及RSL率之共變數成反比 $(\partial\sigma^2(\pi^*)/\partial\sigma_{1a1l}=-2A_1L_1<0)$。

命題三：當 $dE(R_{1a})=dE(R_{1l})=dE(R_{1x})$ 最適資金缺口(OGAP)與預期利率 *E*(R_{1x})成正比。

由附錄之命題三證明式可知，當最適資金缺口為正時，預期利率平行向上移動，會導致銀行擴大資金缺口，反之，當

最適資金缺口為負時，預期利率平行向上移動，會導致銀行縮小資金缺口行為。此一結論中有關資金缺口之操作方向，符合一般傳統所謂積極性策略，惟不同的是，本模型對資金缺口大小有最佳化決定，此為傳統的積極性策略所無。此外在相關文獻如：Flannery and James (1984 a,b)、Hirtle (1997)、Ahmed, Beatty,and Bettinghaus (2004)等的實證結果亦符合命題三的推論。

將(9)式除以(10)式，最適資金缺口率可以寫成：

$$ROGAP = \frac{A_1^*}{L_1^*}$$

$$= \frac{(E(R_{1a}) - R_{2a})(\sigma_{1l}/\sigma_{1a}) - (E(R_{1l}) - R_{2l})\rho_{1a1l}}{-(E(R_{1l}) - R_{2l})(\sigma_{1a}/\sigma_{1l}) + (E(R_{1a}) - R_{2a})\rho_{1a1l}} \tag{12}$$

根據Hart and Jaffee (1974)的證明，銀行的各種資產與負債的最適化比率為固定值，其效率前緣(efficient frontier)為一條位於淨利息收入的期望值與標準差的平面上穿越原點的直線，因此該效率前緣與銀行的規避風險偏好係數(z)無關，僅受外生的利率情境所影響。換句話說，當敏感資產或負債之利率預期值或其標準差改變，就會影響銀行的ROGAP及其效率前緣，然而由Hart and Jaffee (1974)的證明顯示，利率情境對效率前緣斜率之影響方向無法確定，因此本文僅就利率情境對ROGAP或OGAP的影響有所討論。

關於預期利率對OGAP的影響已於命題三討論過，[3]我們可根據(12)式進一步討論利率波動度對OGAP之關係。

命題四：

(一) OGAP與RSA利率的波動度成反比，與RSL利率的波動度成正比；

(二) 若RSA與RSL之利率的波動度同方向同比例變動，則； $\partial OGAP/\partial \sigma_{1x} \gtrless 0$ if $\sigma_{1a} \gtrless \sigma_{1l}$

(三) $\partial OGAP/\partial \rho_{1a1l} \gtrless 0$ if $OGAP \lessgtr 0$。

根據命題四的(一)與(二)可知，當RSA利率風險(或波動度)增加時，銀行會相對於RSL降低RSA持有，反之，當RSL利率風險增加時，銀行會相對於RSA降低RSL持有，但若RSA與RSL之利率的波動度同方向同比例變動時，OGAP的變動方向就要看RSA與RSL之利率原來的波動度大小而定，若二者的波動度一致，則最適資金缺口不須改變，否則波動度大的一方就須減少持有，波動度小的一方，就須增加持有，這些結論基本上與吾人的直觀一致。

命題四的(三)探討RSA與RSL利率的相關係數對最適資金缺口的影響，基本上這與最適資金缺口的原先大小有關，即當最適資金缺口原先為零時，相關係數增減變動對最適資金缺口沒有影響，但若最適資金缺口原先為正，相關係數增加時，銀行

[3] 本文命題三與Hart and Jaffee (1974)之定理10之(1)類似，其結論亦雷同。

應將正缺口向零缺口移動，反之，當最適資金缺口原先為負，相關係數增加時，銀行應將負缺口向零缺口移動，換言之，相關係數越趨近於一時，最適資金缺口就越趨近於零，反之，相關係數越趨近於零時，最適資金缺口離零缺口越遠。

3. 利率連動模型

假定銀行的RSA利率與RSL利率均受一市場指標利率R所影響，[4]其設定如下：$R_{1a}=\alpha_{1a}+\beta_{1a}R+\varepsilon_{1a}$，$R_{1l}=\alpha_{1l}+\beta_{1l}R+\varepsilon_{1l}$，其中$R$為可視為系統風險，為利率風險之主要來源，$\varepsilon_{1a}$、$\varepsilon_{1l}$ R_{1a}、R_{1l}之特有風險，假定ε_{1a}、ε_{1l} identically and independently distributed (iid)隨機變數，因此$E(\varepsilon_{1a})=E(\varepsilon_{1l})=0$，$\mathrm{cov}(\varepsilon_{1a},R)=0$，$\mathrm{cov}(\varepsilon_{1l},R)=0$，$\mathrm{cov}(\varepsilon_{1a},\varepsilon_{1l})=0$，且令$V(\varepsilon_{1a})=\sigma^2_{\varepsilon 1a}$，$V(\varepsilon_{1l})=\sigma^2_{\varepsilon 1l}$，則：

$$E(R_{1a})=\alpha_{1a}+E(R)\beta_{1a} \tag{13}$$

$$E(R_{1l})=\alpha_{1l}+E(R)\beta_{1l} \tag{14}$$

$$\sigma^2_{1a}=\beta^2_{1a}\sigma^2_R+\sigma^2_{\varepsilon 1a} \tag{15}$$

$$\sigma^2_{1l}=\beta^2_{1l}\sigma^2_R+\sigma^2_{\varepsilon 1l} \tag{16}$$

$$\sigma_{1a1l}=\beta_{1a}\beta_{1l}\sigma^2_R \tag{17}$$

其中，β_{1a} (或β_{1l})為利率敏感資產(或負債)對指標利率的敏感度，α_{1a} (或α_{1l})可視為其他外生因素對敏感資產(或負債)的影響。將以上各變數的設定代入(4)(5)(6)式或直接代入(9)(10)二式即可得A_1^*與L_1^*如下：

$$A_1^*=\frac{\left(E(R_{1a})-R_{2a}\right)\left(\beta^2_{1l}\sigma^2_R-\sigma^2_{\varepsilon 1l}\right)+\left(R_{2l}-E(R_{1l})\right)\left(\beta_{1a}\beta_{1l}\sigma^2_R\right)}{z[(\beta^2_{1a}\sigma^2_R+\sigma^2_{\varepsilon 1a})(\beta^2_{1l}\sigma^2_R+\sigma^2_{\varepsilon 1l})-\beta^2_{1a}\beta^2_{1l}\sigma^4_R]} \tag{18}$$

$$L_1^*=\frac{\left(R_{2l}-E(R_{1l})\right)\left(\beta^2_{1a}\sigma^2_R+\sigma^2_{\varepsilon 1a}\right)+\left(E(R_{1a})-R_{2a}\right)\left(\beta_{1a}\beta_{1l}\sigma^2_R\right)}{z[(\beta^2_{1a}\sigma^2_R+\sigma^2_{\varepsilon 1a})(\beta^2_{1l}\sigma^2_R+\sigma^2_{\varepsilon 1l})-\beta^2_{1a}\beta^2_{1l}\sigma^4_R]} \tag{19}$$

---

[4] 參閱Stone (1974) 的two-index model設計，本文並不具體說明指標利率為何，以方便模型的設計。

因此A_1^*與L_1^*以及OGAP之性質與第二節的討論並無太大的不同，惟指標利率R的變動所造成的影響，則有必要進一步討論。

根據附錄之命題三之(A3)式，同理亦可得到：

$$\frac{dE\left[u(\pi^*)\right]}{dE(R)}=\frac{dE[\pi^*]}{dE(R)}=\beta_{1a}A_1^*-\beta_{1l}L_1^*=\beta GAP \tag{20}$$

本文將$\beta_{1a}A_1^*-\beta_{1l}L_1^*$ *GAP*，根據命題五證明中的(A10)式可知：

$$\beta GAP \gtreqless 0 \iff z\{(E(R_{1a})-R_{2a})\beta_{1a}\sigma_{\varepsilon 1l}^2+(E(R_{1l})-R_{2l})\beta_{1l}\sigma_{\varepsilon 1a}^2\}\gtreqless 0 \tag{21}$$

(21)式中除$\sigma_{1l}^2-\sigma_{1a1l}$、$\sigma_{1a}^2-\sigma_{1a1l}$由$\beta_{1a}\sigma_{\varepsilon 1l}^2$、$\beta_{1l}\sigma_{\varepsilon 1a}^2$取代外，其餘均與(A2)式相同，因此$\beta$ *GAP*的正負符號的決定與OGAP類似，此處不再贅述。其次β *GAP*對指標利率、指標利率的變異數等外生變數變動的影響，則需要進一步討論。

命題五：

(一) 指標利率的期望值E(R)與β *GAP*成正比。

(二) 指標利率的變異數σ_R^2與β *GAP*之關係為：$\partial\beta GAP/\partial\sigma_R^2 \gtreqless 0$ if $\beta GAP \lesseqgtr 0$。

命題五之(一)與命題三類似，即當β *GAP*為正時，預期指標利率上升，會導致銀行擴大β *GAP*；當β *GAP*為負時，預期指標利率上升，會導致銀行縮小β *GAP*。反之，當預期指標利率下降時，β *GAP*亦會跟著下降。

命題五之(二)則與命題四類似，當β *GAP*為正時，β *GAP*與指標利率的變異數成正比；當β *GAP*為負時，β *GAP*與指標利率的變異數成反比。換言之，當β *GAP*為正時，指標利率的變異數上升，會導致銀行將β *GAP*朝向β *GAP*=0的方向調降，反之，當β *GAP*為負時，會導致銀行將β *GAP*朝向β *GAP*=0的方向調升。由於指標利率的變異數象徵著銀行所遭遇的利率風險，因此當利率風險增加時，銀行將β *GAP*朝向β *GAP*=0的方向調整，也頗符合一般直觀概念。

我們亦可將上述模型一般化，假定銀行有n個資產，分別是：$A_1,A_2,\ldots,A_n$，其報酬率分別為：$R_{1a},R_{2a},\ldots,R_{na}$；負債有m個，分別是：$L_1,L_2,\ldots,L_m$，其報酬率分別為：$R_{1l},R_{2l},\ldots,R_{ml}$，所有資產除$R_{na}$不受利率風險影響外，其餘資產報酬率均對指標利率具有一定程度的利率敏感性；[5]負債亦復如此，除R_{ml}不受利率風險影響外，其餘負債成本率均對指標利率具有一定程度的利率敏感性，其設定如下：

$$R_{ia}=\alpha_{ia}+\beta_{ia}R+\varepsilon_{ia} \qquad i=1,2,\cdots,n-1$$

[5]如果某項資產為固定利率，則其β值為零。

$$R_{jl} = \alpha_{jl} + \beta_{jl} R + \varepsilon_{jl} \qquad j = 1,2,\cdots,m-1$$

$$E(R_{ia}) = \alpha_{ia} + E(R)\beta_{ia} \qquad i = 1,2,\cdots,n-1$$

$$E(R_{jl}) = \alpha_{jl} + E(R)\beta_{jl} \qquad j = 1,2,\cdots,m-1$$

$$\sigma_{ia}^2 = \beta_{ia}^2 \sigma_R^2 + \sigma_{dia}^2 \qquad i = 1,2,\cdots,n-1$$

$$\sigma_{jl}^2 = \beta_{jl}^2 \sigma_R^2 + \sigma_{djl}^2 \qquad j = 1,2,\cdots,m-1$$

$$\sigma_{iajl} = \beta_{ia}\beta_{jl}\sigma_R^2 \qquad i = 1,2,\cdots n-1$$

$$m = 1,2,\cdots,m-1$$

.

將上述設定代回到第2節的簡單模型，則極大化模型可以重寫成：

$$\max_{\substack{A_i, i=1,12,\cdots,n \\ L_j, j=1,2,\cdots,m}} E[u(\pi)] = E[\pi] - \frac{z}{2} Var(\pi) \qquad (22)$$

$$E(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} (E(R_{ia}) - R_n) A_i - \sum_{j=1}^{m-1} (E(R_{jl}) - R_m) L_j$$

$$= M'X \qquad (23)$$

$$Var[\pi] = X'SX \qquad (24)$$

其中，

$$X' = [A_1, \quad \cdots A_{n-1}, \quad -L_1 \quad \cdots \quad -L_{m-1}]$$

$$M' = [E(R_{1a}) - R_n, \quad \cdots E(R_{n-1}) - R_n,$$
$$E(R_{1l}) - R_m \quad \cdots \quad E(R_{m-1}) - R_m]$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{1a1a} & \cdots & \sigma_{1am-1j} \\ & \ddots & \\ \sigma_{m-1j1a} & & \sigma_{m-1jm-1j} \end{bmatrix}$$

則根據極大化一階條件可得：

$$X = \frac{1}{z} S^{-1} M \qquad (25)$$

(25)式即爲銀行資產與負債的最適解：$A_1^*, A_2^*, \ldots, A_{n-1}^*$與$L_1^*, L_2^*, \ldots L_{m-1}^*$，根據(20)式同理可得β *GAP*爲：

$$\frac{dE[u(\pi^*)]}{dE(R)} = \frac{dE[\pi^*]}{dE(R)} = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{ia} A_i^* - \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{jl} L_j^* \qquad (26)$$

由(26)式爲更一般化的β *GAP*，可消除銀行在實務上不易區分RSA (或RSL) 與非RSA (或非RSL)的困擾。並且由於(26)與(20)的β *GAP*之相關性質並無不同，因此在實務上(26)式的β *GAP*應爲較佳的風險管理工具。

此外本節的模型設計亦可做多種變化，例如將上述銀行的RSA利率與RSL利率均受單一市場指標利率*R*所影響的設定，

可改為Stone (1974)的雙指數模型(two-index model)，即RSA利率與RSL利率均受股票市場報酬率與債券市場利率所影響：

$$R_{ia} = \alpha_{ia} + \beta_{ia} R_E + \gamma_{ia} R_D + \varepsilon_{ia} \quad i = 1,2,\cdots,n-1$$

$$R_{jl} = \alpha_{jl} + \beta_{jl} R_E + \gamma_{jl} R_D \varepsilon_{jl} \quad j = 1,2,\cdots,m-1$$

則β GAP為

$$\sum_{i=1}^{n-1} \beta_{ia} A_i^* + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{ia} A_i^* - \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{jl} L_j^* - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_{jl} L_j^* \tag{27}$$

因此β GAP可根據不同的利率連動設計而不同，然而，無論是OGAP或β GAP均是在利率風險下的最佳化選擇，可供金融機構在實務操作上參考。

4. 結論

本文的貢獻有二：其一是導出最適資金缺口及其相關性質，讓決策者可以在各種利率情境下，根據最適資金缺口進行操作，並獲取期望淨利息收入極大。其次是本文將銀行的RSA利率與RSL利率與指標利率連動，因此而導出的β GAP與前述的OGAP在性質上類似，但更一般化，不但可以解決傳統模型難以劃分利率敏感與不敏感資產(或負債)的困擾，亦可讓決策者在利率風險管理上有更大的操作空間。

本文為一短期靜態模型，解釋現實經濟社會能力受到相當限制，未來應朝向模型動態化，考慮利率期限結構變化之影響，使得本文所揭櫫議題能獲得更貼近現實面的解釋。此外，本模型可進一步進行實證及模擬分析，以瞭解理論模型與實際經營者的行為模式是否一致，並作為銀行經營在利率風險管理上的參考。

附錄

命題一： 當 $\rho_{1a1l}=1$ 且 $\sigma_{1a}^2=\sigma_{1l}^2$時，$OGAP$=0。當$|\rho_{1a1l}\neq 1$ OGAP $\gtreqless$ 0之充要條件為：

$\sigma_{1l}^2 \gtreqless \sigma_{1a}^2$ 且 $\Delta R_a \gtreqless \Delta R_l$

證明：將(9)減(10)式，可得：

$$A_1^* - L_1^* = \frac{[E(R_{1a})-R_{2a}](\sigma_{1l}^2-\sigma_{1a1l})-[R_{2l}-E(R_{1l})](\sigma_{1a}^2-\sigma_{1a1l})}{z(\sigma_{1a}^2\sigma_{1l}^2-\sigma_{1a1l}^2)} \tag{A1}$$

由於求極大化之二階條件為：$z^2(\sigma_{1a}^2\sigma_{1l}^2-\sigma_{1a1l}^2)>0$ (A1)式為正或負的的充要條件為：

$$z\{[E(R_{1a})-R_{2a}](\sigma_{1l}^2-\sigma_{1a1l})-[R_{2l}-E(R_{1l})](\sigma_{1a}^2-\sigma_{1a1l})\} \gtreqless 0 \tag{A2}$$

當 $\rho_{1a1l}=1$則，則$\sigma_{1a}^2=\sigma_{1l}^2$ $\sigma_{1a}^2-\sigma_{1a1l}=\sigma_{1l}^2-\sigma_{1a1l}=0$ (A2)為零，即$OGAP$=0。由於z > 0，若 $0<\rho_{1a1l}=\sigma_{1a1l}/(\sigma_{1a}\sigma_{1l})<1$ (A2)式隱含：

$$\sigma_{1l}^2 \gtreqless \sigma_{1a}^2 \text{ 且 } \Delta R_a=[E(R_{1a})-R_{2a}] \gtreqless \Delta R_l=[R_{2l}-E(R_{1l})]$$

同理當 $-1<\rho_{1a1l}<0$，則(A2)式隱含：$\sigma_{1l}^2 \gtreqless \sigma_{1a}^2$ 但 $\Delta R_a \gtreqless \Delta R_l$

命題二：$G(E,h)$為E之convex 函數。

證明：令 $X=(A_1,A_2,-L_1,-L_2)$，$E=(E(R_{1a}),R_{2a},E(R_{1l}),R_{2l})$ $E''=tE+(1-t)E'$

X''為E''之最適解，X與X'分別為E與E'之最適解，則：

$$\begin{aligned} G(E'',h) &= E''X''-\frac{z}{2}\sigma(\pi'')=[tE+(1-t)E']X''-\frac{z}{2}\sigma^2(\pi'') \\ &=[tEX''+(1-t)E'X'']-\frac{z}{2}\sigma^2(\pi'') \le [tEX+(1-t)E'X']-\frac{z}{2}\sigma^2(\pi'') \end{aligned}$$

故得證。

命題三： 當 $dE(R_{1a}) = dE(R_{1l}) = dE(R_{1x})$，最適資金缺口(OGAP)與預期利率$E(R_{1x})$成正比。

證明： 將(9)(10)二式代入(4)式可得利潤之預期效用極大值。根據包絡定理 (envelope theorem)可得：

$$\frac{dE\left[u(\pi^*)\right]}{dE(R_{1a})} = A_1^*$$

$$\frac{dE\left[u(\pi^*)\right]}{dE(R_{1l})} = -L_1^*$$

當 $dE(R_{1a}) = dE(R_{1l}) = dE(R_{1x})$，則：

$$\frac{dG(E,V)}{dE(R_{1x})} = \frac{dE[\pi^*]}{dE(R_{1x})} = A_1^* - L_1^* = OGAP \tag{A3}$$

由於$G(E,V)$爲E的Convex 函數，故：

$$\frac{d^2G(E,V)}{dE(R_{1x})^2} = \frac{dOGAP}{dE(R_{1x})} > 0$$

故得證。

命題四：

(一) OGAP與RSA利率的波動度成反比，與RSL利率的波動度成正比。

(二) 若RSA與RSL之利率的波動度同方向同比例變動，則 $\partial OGAP/\partial\sigma_{1x} \gtreqless 0$ if $\sigma_{1a} \gtreqless \sigma_{1l}$

(三) $\partial OGAP/\partial\rho_{1a1l} \gtreqless 0$ if $OGAP \gtreqless 0$

證明：

(一) 由於最適資金缺口率(ROGAP)與最適資金缺口(OGAP)的變動方向一致，因此將(13)式的ROGAP對σ_{1a}做偏微分可得：

$$\frac{\partial ROGAP}{\partial \sigma_{1a}}=\frac{-(E(R_{1a})-R_{2a})\frac{\sigma_{1l}}{\sigma_{1a}^{2}}+(E(R_{1l})-R_{2l})\frac{A_1^*}{L_1^*}\frac{1}{\sigma_{1l}}}{-(E(R_{1l})-R_{2l})\frac{\sigma_{1a}}{\sigma_{1l}}+(E(R_{1a})-R_{2a})\rho_{1a1l}} \tag{A4}$$

由於 $E(R_{1a})-R_{2a}>0$、$R_{2l}-E(R_{1l})>0$ $\rho_{1a1l}>0$ (A4)大於零，即OGAP與σ_{1a}成反比。

同理可得：

$$\frac{\partial ROGAP}{\partial \sigma_{1l}}=\frac{(E(R_{1a})-R_{2a})\frac{\sigma_{1l}}{\sigma_{1a}^{2}}-(E(R_{1l})-R_{2l})\frac{A_1^*}{L_1^*}\frac{1}{\sigma_{1l}}}{-(E(R_{1l})-R_{2l})\frac{\sigma_{1a}}{\sigma_{1l}}+(E(R_{1a})-R_{2a})\rho_{1a1l}}=-\frac{\partial ROGAP}{\partial \sigma_{1a}}$$

故ROGAP (或OGAP)與σ_{1l}成正比。

(二) 如果 $\partial\sigma_{1a}=\partial\sigma_{1l}=\partial\sigma_{1x}$

$$\frac{\partial ROGAP}{\partial \sigma_{1x}}=\frac{-(E(R_{1a})-R_{2a})(\frac{1}{\sigma_{1a}}-\frac{\sigma_{1l}}{\sigma_{1a}^{2}})+(E(R_{1l})-R_{2l})\frac{A_1^*}{L_1^*}(\frac{1}{\sigma_{1l}}-\frac{\sigma_{1a}}{\sigma_{1l}^{2}})}{-(E(R_{1l})-R_{2l})\frac{\sigma_{1a}}{\sigma_{1l}}+(E(R_{1a})-R_{2a})\rho_{1a1l}} \tag{A5}$$

由於分母為正，而分子可以寫成：

$$(\sigma_{1a}-\sigma_{1l})[(E(R_{1a})-R_{2a})\sigma_{1l}^{2}L_1^*-(E(R_{1l})-R_{2l})\sigma_{1a}^{2}A_1^*]$$

其中括號內的數值為正，故：

$$\frac{\partial OGAP}{\partial \sigma_{1x}}\gtrless 0 \quad \text{if} \quad \sigma_{1a}\gtrless\sigma_{1l} \tag{A6}$$

(三) 將(13)式對ρ_{1a1l}微分得：

$$\frac{\partial ROGAP}{\partial \rho_{1a1l}}=\frac{-(E(R_{1l})-R_{2l})-(E(R_{1a})-R_{2a})\frac{A_1^*}{L_1^*}}{-(E(R_{1l})-R_{2l})\frac{\sigma_{1a}}{\sigma_{1l}}+(E(R_{1a})-R_{2a})\rho_{1a1l}} \tag{A7}$$

故：

$$\frac{\partial OGAP}{\partial \rho_{1a1l}}\gtreqless 0 \quad \text{if} \quad -(E(R_{1l})-R_{2l})L_1^*-(E(R_{1a})-R_{2a})A_1^*\gtreqless 0 \tag{A8}$$

由於：$(E(R_{1a})-R_{2a})A_1^*\gtreqless(R_{2l}-E(R_{1l}))L_1^* \qquad OGAP\gtreqless 0$

$$\frac{\partial OGAP}{\partial \rho_{1a1l}}\gtreqless 0 \;\; \text{if} \;\; \text{OGAP}\lesseqgtr 0 \tag{A9}$$

命題五：

(一) 指標利率的期望值E(R)與β GAP成正比。

(二) 指標利率的變異數σ_R^2與β GAP之關係為：$\partial\beta GAP/\partial\sigma_R^2\gtreqless 0 \quad \text{if} \quad \beta GAP\lesseqgtr 0$

證明：將(18)(19)式代入(20)式可得：

$$\beta GAP=\beta_{1a}A_1^*-\beta_{1l}L_1^* \;=\frac{[E(R_{1a})-R_{2a}]\beta_{1a}\sigma_{\varepsilon 1l}^2+[E(R_{1l})-R_{2l}]\beta_{1l}\sigma_{\varepsilon 1a}^2}{z[(\beta_{1a}^2\sigma_R^2+\sigma_{\varepsilon 1a}^2)(\beta_{1l}^2\sigma_R^2+\sigma_{\varepsilon 1l}^2)-\beta_{1a}^2\beta_{1l}^2\sigma_R^4]} \tag{A10}$$

因此，

$$\frac{\partial\beta GAP}{\partial E(R)}=\frac{\beta_{1a}^2\sigma_{\varepsilon 1l}^2+\beta_{1l}^2\sigma_{\varepsilon 1a}^2}{z[(\beta_{1a}^2\sigma_R^2+\sigma_{\varepsilon 1a}^2)(\beta_{1l}^2\sigma_R^2+\sigma_{\varepsilon 1l}^2)-\beta_{1a}^2\beta_{1l}^2\sigma_R^4]}>0 \tag{A11}$$

$$\frac{\partial \beta GAP}{\partial \sigma_R^2} = \frac{-z \cdot \beta GAP(\beta_{1a}^2 \sigma_{\varepsilon 1l}^2 + \beta_{1l}^2 \sigma_{\varepsilon 1a}^2)}{z[(\beta_{1a}^2 \sigma_R^2 + \sigma_{\varepsilon 1a}^2)(\beta_{1l}^2 \sigma_R^2 + \sigma_{\varepsilon 1l}^2) - \beta_{1a}^2 \beta_{1l}^2 \sigma_R^4]} \gtreqless 0 \quad \text{if } \beta\text{GAP} \lesseqgtr 0 \tag{A12}$$

故得證。

參考文獻

Ahmed, A.S., A. Beatty, and B. Bettinghaus (2004), “Evidence on the Efficacy of Interest-Rate Risk Disclosures by commercial Banks”, *The International Journal of Accounting,* 39, 223-251.

Ahmed, A.S., A. Beatty, and C. Takeda (1997), *Evidence on Interest Rate risk Management and Derivatives Usage by Commercial Banks* Working Paper. Pennsylvania State University.

Allen, F., and A. M. Santomero (1998), “The theory of Intermediation”, *Journal of Banking and Finance* 21, 1461-1485.

Bierwag, G.O. (1977), “Duration, and Term Structure of Interest Rates”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 12, 725-742.

Bierwag. G.O. and George G. Kaufman (1985), “Duration Gap for Financial Institutions”, *Financial Analysts Journal,* 68-71.

Cooper, I.A. (1977), “Asset Values, Interest-Rate Changes, and Duration”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 701-723.

Flannery, Mark J. and Christopher M. James (1984 a), “Market Evidence on the effective Maturity of Bank Assets and Liabilities”, *Journal of Money, Credit, and Banking, 16* (November, part 1), 435-445.

Flannery, Mark J. and Christopher M. James (1984 b), “The Effect of Interest Rate Changes on the Common Stock Returns of financial Institutions”, *Journal of finance, 39* (September), 1141-1153.

Grove, M.A. (1974), “On Duration and the Optimal Maturity Structure of the Balance Sheet”, *Bell Journal of Economics and Management Science* 5, 696-709.

Hart, O.D. and D.M. Jaffee (1974), “On the Application of Portfolio theory to Depository finance Intermediaries”, *Review of Economic Studies,* 41, 129-147.

Hirtle, B. (1997), “Derivatives, Portfolio Composition, and Bank Holding Company Interest Rate Risk Exposure”, *Journal of Financial Services Research,* 243-266.

Lynge, M.J., and J.K. Zumwalt (1980), “An Empirical Study of the Interest Rate Sensitivity of Commercial Bank Returns: A Multi-Index Approach”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 15, 731-742.

Parkin, M. (1970), “Discount House Portfolio and Debt”, *Review of Economic Studies,* 37, 469-497.

Prisman, E.Z. and Yisong Tian (1993), "Duration Measures, Immunization, and Utility Maximization", *Journal of Banking and Finance,* 689-707.

Pyle, D. H. (1971), "On the Theory of financial Intermediation", *Journal of Finance* 26, 737-747.

Stone, Bernell K. (1974), "Systematic Interest Rate Risk in a Two-Index Model of returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 9* (November), 709-721.

Wetmore, Jill L.T., and John R. Brick (1990), "Interest Rate Risk and The Optional Gap for Commercial Banks: An Empirical Study", *The Financial Review,* November, 539-557.