

金融風險管理季刊
民96，第三卷，第三期，41-59

違約機率校準方法之穩健性研究*

The Research of Robustness in Calibration of Probability of Default

投稿日期：96.05.07

接受日期：96.08.13

洪明欽**

Ming-Chin Hung

東吳大學商用數學系

Department of Business Mathematics,
Soochow University

尹晟齋

Cheng-He Yin

東吳大學商用數學系

Department of Business Mathematics,
Soochow University

張揖平

Yi-Ping Chang

東吳大學商用數學系

Department of Business Mathematics,
Soochow University

盧昆輝

Kun-Hui Lu

東吳大學商用數學系

Department of Business Mathematics,
Soochow University

摘要

本文透過財團法人金融聯合徵信中心 (Joint Credit Information Center) 的金融授信資料，探討違約機率 (probability of default) 校準 (calibration) 方法的穩健性，此外亦探討銀行及監理機關在使用違約機率校準方法時應注意的事情。本文使用的違約機率校準工具為巴塞爾銀行監理委員會之 working paper No. 14 所提供的 Normal test 與 Traffic lights test。在違約機率校準時，銀行不希望的是申報的預測違約機率即使是足夠的，但校準結果認為不足，使銀行必須再提高資本計提；而監理機關則不希望銀行以較低的預測違約機率通過違約機率校準，因為一旦發生大量違約事件，資本計提不足使得銀行會蒙受極大的損失。

研究結果發現銀行使用足夠的預測違約機率卻被校準工具拒絕的機率會隨著資產相關係數增加而降低，而不足的預測違約機率通過校準的機率亦會隨著資產相關係數增加而變大。本文提供採用內部評等法的銀行及監理機關在進行風險管理時，對預測違約機率的校準有更深入的瞭解。

關鍵詞：違約機率、校準、資產相關係數、檢定。

JEL 分類代號：G52, G28, G33

* 本文感謝三位匿名審稿者的細心審閱，並提供寶貴的建議，使本文內容更為充實，特此致謝。

** 作者通訊：洪明欽，東吳大學商用數學系，台北市貴陽街一段56號。

TEL: 886-2-2311-1531#2620，E-mail: nhungg@bmath.scu.edu.tw

Abstract

In this research, with data set provided by Joint Credit Information Center (JCIC), we discuss the robustness in calibration of probability of default and circumstances when proceeding calibration of probability of default — with Normal test and Traffic lights tests, which provided by the working paper No. 14 of Basel Committee on Banking Supervision. Banks do not hope that even when their forecasted default probabilities are high enough, but still being rejected by the regulator, in that case banks have to raise their capital charge. On the other hand, the regulator is unwilling to see an insufficient forecasted default probability passes the test, since if a great deal of defaults happen with insufficient capital support, banks will suffer huge loss and which might cause systematic risk.

Our numerical results show that when asset correlation increases, the chance of a correct forecasted default probabilities rejected by regulator decreases, and the probabilities of making a wrong decision (i.e., pass an insufficient forecasted default probability) increases. The result of this research provides those banks using internal ratings based approach and the regulator better understanding for the calibration of forecasted default probabilities when managing risk.

Key Words: probability of default, calibration, asset correlation, test.

JEL Classification: G52, G28, G33

1. 前言

國際清算銀行 (Bank for International Settlement) 之巴塞爾銀行監理委員會 (Basel Committee on Banking Supervision, 簡稱 BCBS) 於 1988 年 7 月發佈銀行資本協定 (The Basel Capital Accord, 簡稱 Basel I), 其協定將計算資本適足率 (capital adequacy ratio) 的分母從原先的資產總額改變為風險性資產, 並訂定資本適足率不得低於 8%。但隨著金融環境的變化、衍生性金融商品快速發展, 銀行所承受的風險已超出 Basel I 的規範, 因此巴塞爾銀行監理委員會於 2004 年 6 月底公布新巴塞爾資本協定 (The New Basel Capital Accord, 簡稱 Basel II)。

參考 BCBS (2004), 其修訂內容包括建立資本協定的三大支柱 (three pillars): 最低的資本要求 (minimum capital requirements)、監理審查程序 (supervisory review process) 和市場紀律 (market discipline)。

Basel II 在第一支柱規範中, 允許在監理機關同意後, 採用基礎內部評等法 (Foundation Internal Ratings Based Approach) 之銀行, 依違約機率 (probability of default, 簡稱 PD)、違約損失率 (loss given default)、違約曝險額 (exposure at default) 與剩餘期間 (remaining maturity) 等風險指標計算應計提的資本, 其中 PD 是由銀行的內部評等系統估測, 其他指標須由監理機構提供其預測值或是依 Basel II 提供的公式計算

¹。而採用進階內部評等法的銀行 (Advanced Internal Ratings Based Approach)，可進一步估測其他風險指標來計提資本。由於採用內部評等法 (不論基礎內部評等法或是進階內部評等法) 之銀行，銀行與監理機關皆須驗證 (validation) 該銀行內部評等系統。而驗證內部評等系統主要分為二部分，一為評分模型區別力 (discriminatory power)，顯示評分模型在區分授信戶違約與否的能力；另一部分為違約機率校準 (calibration)，檢查銀行依內部評等系統所估算的預測違約機率 (forecasted default probability) 是否合適。因此評分模型區別力與違約機率校準在信用風險管理上日漸重要，而本文主要針對違約機率校準的部分進行探討。

採用內部評等法的銀行，其資本的計提會依銀行所估算的預測違約機率的高低而不同。估算的預測違約機率越高，銀行需要的資本計提也越多，並不利於銀行的營收；而估算的預測違約機率過低，會使得銀行所計提的資本將無法有效的涵蓋違約事件發生時的損失，若發生巨大事件 (如雙卡事件、金融風暴) 或經濟不景氣，銀行將會受到強烈的衝擊，輕則營收虧損，重則不敷損失倒閉。因此依內部評等系統所估算的預測違約機率是否足夠涵蓋真實的違約機率就是銀行與監理機構關心的議題。違約機率的校準就是應用統計上的檢定方法，利用歷史資料，判斷銀行所估算

的預測違約機率是否足夠涵蓋真實的違約機率。本文利用財團法人金融聯合徵信中心 (Joint Credit Information Center，簡稱聯徵中心) 的金融授信業務資料，探討 BCBS (2005) 之 working paper 所提供的違約機率校準方法：Normal test 與 Traffic lights test 在不同的情況下，其檢定的結果可信度是否穩健。

本文除第一章為前言外，第二章是文獻回顧，探討違約機率校準方法相關文獻，第三章為研究設計，內容包含研究資料、研究方法與研究主題，第四章則為違約機率校準方法對聯徵中心內部評等系統進行實證分析，並對違約機率校準方法進行穩健性探討，最後第五章為結論與建議。

2. 文獻回顧

BCBS (2005) 提供了四種違約機率校準的方法：Binomial test, Chi-square test, Normal test 和 Traffic lights test，其中 Binomial test 和 Chi-square test 適用於校準期數為一期，而 Normal test 與 Traffic lights test 則適用於校準期數為多期。BCBS (2005) 中有關 Normal test 和 Traffic lights test 的研究結論與下述文獻的結果相同。

Tasche (2003) 提出利用不同燈號的概念來校準預測違約機率。其先設定兩個機率 0.95 和 0.999，令門檻值 C_{low} 和 C_{high} 代

¹ 計算公式參照 BCBS (2004) “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework.”

表樣本違約機率小於或等於門檻值的機率為 0.95 與 0.999。當樣本違約機率小於或等於 C_{low} 時，代表該預測違約機率是足夠的，因此將此預測違約機率設為綠燈。黃燈是當樣本違約機率大於 C_{low} 但小於 C_{high} ，意味著樣本違約機率與預測違約機率約略相同，且誤差仍在統計上可接受的範圍內。而紅燈則是當樣本違約機率大於 C_{high} 時的狀況，顯示出樣本違約機率與預測違約機率的差距已過大，需重新檢視預測違約機率是否有不合理的情形。

Blochwitz et al. (2004) 探討在不同的顯著水準、資產相關係數與時間相關係數（每年景氣之間的相關性）下，對違約機率校準方法中的 Normal test 與 Traffic lights test 的影響，其研究結果發現：(1) 在考慮資產相關係數與時間相關係數的情況下，大部分的情況 Normal test 拒絕足夠的預測違約機率的機率會比 Traffic lights test 為小，因此是對銀行較有利的方法。(2) 當在預測違約機率其實是不足的狀況下，Traffic lights test 能正確判斷出預測違約機率是不足的能力比 Normal test 好，因此是對監理機關較有利的方法。

Blochwitz et al. (2005) 提出對針對資產相關係數與時間相關係數的 Traffic lights test 修正法，並探討不同的資產相關係數對 Traffic lights test 修正法中的各種燈號發生機率的影響，發現資產相關係數越高，各燈號發生機率將與原先設定的機率差異越來越大，導致方法產生與假設不符的偏誤，使得 Traffic lights test 與修正法的檢定力皆會降低。

本文主要利用違約機率校準方法中的 Normal test 與 Traffic lights test 對聯徵中心的金融授信事務資料進行違約機率校準的實證研究外，亦探討許多與 Blochwitz et al. (2004) 類似的情境，檢視違約機率校準方法 Normal test 與 Traffic lights test 的檢定力表現，由此得到對銀行或監理機關在使用 Normal test 與 Traffic lights test 時，了解資產相關係數的影響及應該注意的事項。

3. 研究設計

3.1 研究資料

聯徵中心將資料分成三個部分：未上市櫃公開發行公司、有財報非公開發行公司和無財報非公開發行公司。本文所使用的資料是無財報非公開發行公司，內容包含 1997 到 2004 評分年度授信戶資料和 1998 到 2005 年度之違約個數資料。表 1 為其樣本統計結果，需要注意的是違約個數與非違約個數的統計年度均落後評分年度一年。此外，在無財報非公開發行公司之下可細分產業別，聯徵中心共分為 11 個產業別，而 11 個產業中樣本違約機率最高的是營建業，所以本文另以營建業的違約機率校準結果作為比較，各產業樣本違約機率可參考圖 1。

在無財報非公開發行公司下，聯徵中心內部評等系統將其細分為 9 個評等，評等 1 為信用最佳，評等 9 為信用最差。本文資料包含了無財報非公開發行公司各評等之授信戶個數及實際違約個數。定義樣本違約機率為：

樣本違約機率

$$= \frac{\text{前一年之授信戶在當年之違約總數}}{\text{前一年之授信戶總數}} \quad (1)$$

表2和表3分別代表在無財報非公開發行公司與營建業下，各評等各年度的樣本違約機率。若該評等在前一年沒有授信戶，則樣本違約機率以“-”表示。

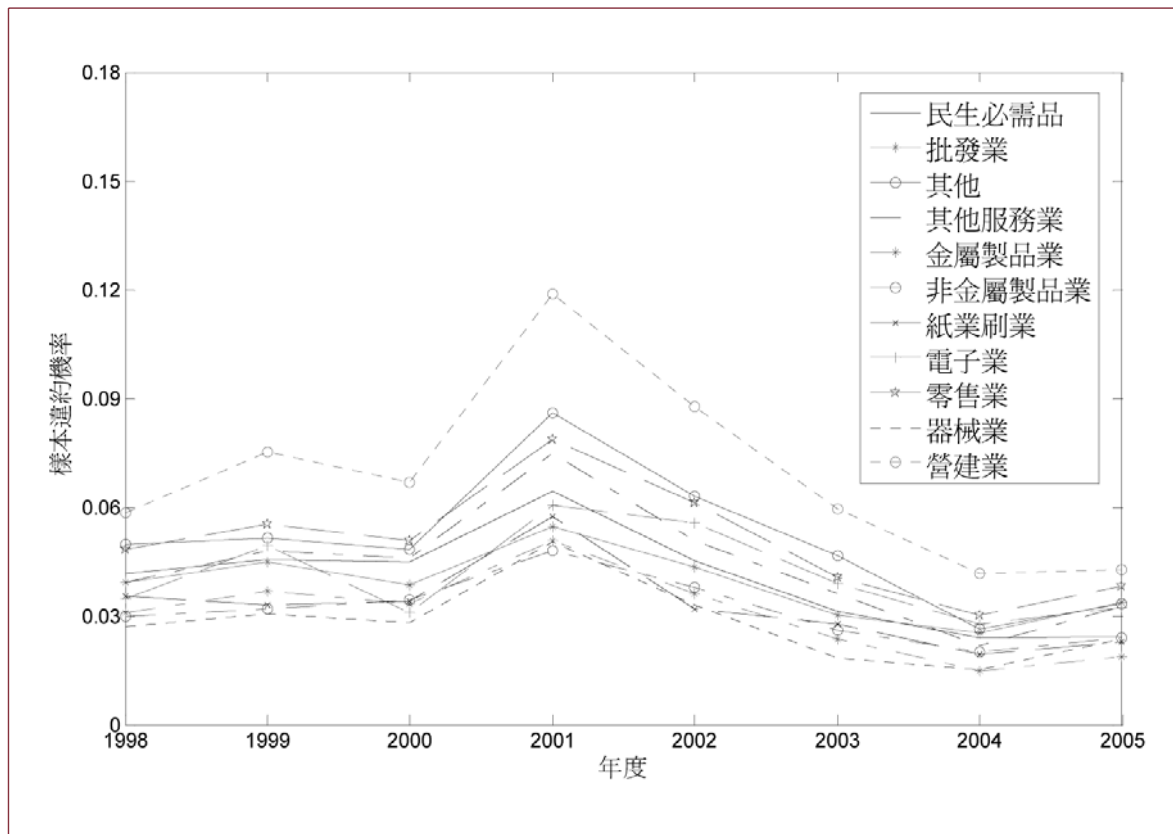


圖 1 各產業樣本違約機率

表 1 無財報非公開發行公司各評分年度之樣本統計

評分年度	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
總授信戶	90864	88809	88269	89743	86382	87870	94576	104465
年度	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
違約個數	3681	4097	3676	5960	4280	2986	2383	3325
非違約個數	87183	84712	84593	83783	82102	84884	92193	101140

表 2 無財報非公開發行公司各評等之樣本違約機率

年度 評等	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	期望值	標準差
1	—	—	—	—	0.00%	0.00%	0.12%	0.14%	0.07%	0.08%
2	—	—	0.14%	—	0.47%	0.27%	0.24%	0.17%	0.26%	0.13%
3	0.35%	0.55%	0.40%	0.66%	0.67%	0.65%	0.54%	0.49%	0.54%	0.12%
4	0.68%	0.77%	0.76%	1.22%	1.49%	1.41%	1.14%	1.05%	1.07%	0.31%
5	1.42%	1.67%	1.43%	1.86%	2.32%	2.22%	2.03%	2.13%	1.89%	0.35%
6	2.17%	2.73%	2.37%	3.55%	4.62%	3.80%	3.51%	4.07%	3.35%	0.85%
7	3.44%	4.57%	4.38%	6.91%	7.25%	6.89%	6.28%	6.94%	5.83%	1.47%
8	6.63%	8.35%	8.31%	12.25%	10.65%	10.30%	10.68%	11.35%	9.82%	1.87%
9	13.23%	17.23%	16.60%	23.67%	20.84%	20.54%	18.85%	20.13%	18.89%	3.18%

表 3 營建業各評等之樣本違約機率

年度 評等	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	期望值	標準差
1	—	—	—	—	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	—	—	0.00%	—	4.17%	0.58%	0.67%	0.00%	1.08%	1.74%
3	0.00%	0.00%	2.50%	0.99%	1.81%	1.15%	1.08%	0.29%	0.98%	0.88%
4	1.09%	2.15%	0.78%	0.00%	2.20%	2.02%	0.61%	1.43%	1.29%	0.81%
5	1.02%	2.05%	2.59%	1.82%	3.68%	2.24%	1.47%	1.26%	2.02%	0.85%
6	2.29%	3.03%	2.43%	3.40%	4.75%	3.62%	2.71%	2.95%	3.15%	0.79%
7	3.74%	4.83%	3.93%	6.29%	7.44%	6.57%	5.11%	5.02%	5.37%	1.30%
8	4.92%	6.28%	6.24%	11.50%	10.32%	9.92%	9.70%	9.26%	8.52%	2.37%
9	10.76%	15.83%	14.55%	24.76%	21.26%	19.73%	20.83%	16.86%	18.07%	4.43%

3.2 研究方法

3.2.1 違約機率校準方法

內部評等系統往往是銀行判斷授信戶的違約機率大小的重要依據，但事實上，內部評等系統所估算的預測違約機率與樣

本違約機率並不會完全相同，因此我們關心的是內部評等系統所估算的預測違約機率是否會低於真實違約機率。若預測違約機率低於真實違約機率，代表銀行所計提的資本不足以涵蓋當違約事件發生時的損失。而違約機率校準就是利用統計上的檢

定方法來判斷內部評等系統的預測違約機率是否低於真實違約機率。

BCBS (2005) 提供了四種違約機率校準的方法：Binomial test, Chi-square test, Normal test 和 Traffic lights test。由於 Binomial test 主要是檢定單一評等在單一時間點，其預測違約機率是否足夠；Chi-square test 是用來檢定多個評等在單一時間點，所有評等的預測違約機率是否足夠，

而 Normal test 與 Traffic lights test 則是跨期的檢定方法，校準單一評等在不同期間的預測違約機率是否足夠，表 4 為四種校準方法之比較整理。由於我們關心的是內部評等系統是否能在不同的年度有效地運行，而非強調單一年度預測違約機率是否夠精確，因此本文所使用的違約機率校準方法為 Normal test 與 Traffic lights test。

表 4 違約機率校準方法比較

校準方法	校準評等數目	校準期數
Binomial test	單一評等	一期
Chi-square test	多個評等	一期
Normal test	單一評等	多期
Traffic lights test	單一評等	多期

Normal test 與 Traffic lights test 虛無假設 (null hypotheses) H_0 和對立假設 (alternative hypotheses) H_1 為：

$$H_0 : \text{對所有的 } t = 1, \dots, T, PD_t \leq PD_t^{(F)}$$

$$H_1 : \text{對所有的 } t = 1, \dots, T, PD_t > PD_t^{(F)}$$

其中 T 為違約機率校準的總期數， PD_t 為第 t 期母體的真實違約機率， $PD_t^{(F)}$ 為第 t 期所使用的預測違約機率。由於 Normal test 與 Traffic lights test 檢定方法的設計就是關心內部評等系統長時間的表現是否穩定，少數期間的預測違約機率不足是可以接受

的，因此 H_1 設定為對所有的校準期間，預測違約機率都小於真實違約機率，而非 H_0 的補集合：存在一個校準期間，預測違約機率小於真實違約機率。

Normal test 為 Blochwitz et al. (2004) 提出，被引用至 BCBS (2005)。假設每期樣本違約機率 d_t 是獨立的隨機變數，且其變異數相等，其檢定統計量為：

$$\frac{\sum_{t=1}^T (d_t - PD_t^{(F)})}{\sqrt{T}\tau} \quad (2)$$

當所有 $t = 1, \dots, T$ ， $PD_t = PD_t^{(F)}$ 時，根據中

央極限定理 (central limit theorem) 檢定統計量具有標準常態分配。因此當顯著水準為 α 時，拒絕域為：

$$\frac{\sum_{t=1}^T (d_t - PD_t^{(F)})}{\sqrt{T}\tau} > Z_{1-\alpha} \quad (3)$$

其中 $Z_{1-\alpha}$ 為標準常態分配之 $1-\alpha$ 的分位數， τ 為：

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=1}^T (d_t - PD_t^{(F)})^2 - \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T (d_t - PD_t^{(F)}) \right)^2 \right)} \quad (4)$$

當拒絕 H_0 時，表示有足夠證據顯示銀行所使用的預測違約機率小於真實違約機率，亦即預測違約機率並不適切。反之，表示沒有足夠證據顯示預測違約機率是不足的，該預測違約機率是可以被銀行接受的。

Traffic lights test 為 Tasche (2003) 和 Blochwitz et al. (2004) 所提出，被引用至 BCBS (2005)。令 N_1, \dots, N_T 為期數 $t = 1, \dots, T$ 的授信戶個數，每期的違約個數分別為 D_1, \dots, D_T 。假設每期樣本違約機率是獨立 (independent) 的隨機變數且授信戶是否違約亦為獨立，定義 R_t 為：

$$R_t = \frac{D_t - N_t PD_t^{(F)}}{\sqrt{N_t PD_t^{(F)} (1 - PD_t^{(F)})}}, \quad t = 1, \dots, T \quad (5)$$

依據大數法則，當 N_T 很大時，且對所有 $t = 1, \dots, T$ ， $PD_t = PD_t^{(F)}$ ， R_t 之分配近似標準常態分配。定義映射函數 (mapping function) $C(R_t)$ 為：

$$C(R_t) = \begin{cases} g, & R_t < \Phi^{-1}(q_g) \\ y, & \Phi^{-1}(q_g) \leq R_t < \Phi^{-1}(q_g + q_y) \\ o, & \Phi^{-1}(q_g + q_y) \leq R_t < \Phi^{-1}(q_g + q_y + q_o) \\ r, & \Phi^{-1}(q_g + q_y + q_o) \leq R_t \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 代表標準常態分配之累積分配函數的反函數， q_g 為綠燈發生的機率、 q_y 為黃燈發生的機率、 q_o 為橘燈發生的機率及 q_r 為紅燈發生的機率。Blochwitz et al. (2004) 取 $q_g = 0.5$ 、 $q_y = 0.3$ 、 $q_o = 0.15$ 及 $q_r = 0.05$ ，本文使用相同的設定。該設定代表當樣本違約機率小於預測違約機率則給予綠燈，若為紅燈則代表樣本違約機率遠大於預測違約機率，圖 2 為映射函數與樣本違約機率之關係。

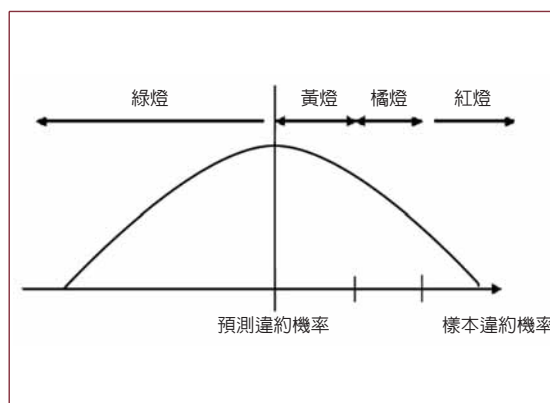


圖 2 映射函與樣本違約機率關係

將各期 R_t 代入映射函數 $C(R_t)$ 中，即可得到 T 期的燈號。定義 A_g 、 A_y 、 A_o 、 A_r 分別表示 T 期內出現的綠燈、黃燈、橘燈及紅燈次數，當所有 $t=1, \dots, T$ ， $PD_t = PD_t^{(F)}$ 為真時， $\underline{A} = (A_g, A_y, A_o, A_r)$ 具有多項分配，其機率分配為：

$$P[\underline{A} = (a_g, a_y, a_o, a_r)] = \frac{T!}{a_g! a_y! a_o! a_r!} q_g^{a_g} q_y^{a_y} q_o^{a_o} q_r^{a_r} \quad (7)$$

在滿足檢定的期數小於9下，定義檢定統計量 V 為：

$$V = 1000A_g + 100A_y + 10A_o + A_r \quad (8)$$

例如檢定統計量 $V = 2100$ ，代表校準期數為三期²，三期的燈號有兩個綠燈和一個黃燈。在顯著水準 α 下，拒絕域為：

$$V \leq v_\alpha \quad (9)$$

其中 v_α 為滿足 $P(V \leq v) = \alpha$ 的最大的 v 。表5為當校準期數為三期時，Traffic lights test 之 $P(V \leq v)$ 。例如當顯著水準為0.05時，由表5可知 v_α 取為120。

當拒絕 H_0 時，表示有足夠證據顯示銀行所使用的預測違約機率小於母體真實違約機率，此預測違約機率並不適切。反之，表示沒有足夠證據顯示預測違約機率是不足的。

表5 Traffic lights test 之 V 的左尾機率

v	$P(V \leq v)$	v	$P(V \leq v)$
3	0.00013	1002	0.12875
12	0.00125	1011	0.15125
21	0.00463	1020	0.18500
30	0.00800	1101	0.23000
102	0.01025	1110	0.36500
111	0.02375	1200	0.50000
120	0.04400	2001	0.53750
201	0.05750	2010	0.65000
210	0.09800	2100	0.87500
300	0.12500	3000	1.00000

² $V = 2100$ ，校準期數 = $2+1+0+0 = 3$ 。

3.2.2 模擬法

Blochwitz et al. (2004) 利用 Gordy (2003) 的單因子模型 (one-factor model) 假設下，提出模擬不同情境下樣本違約機率的作法。單因子模型為假設對第 t 期所有授信戶而言，第 i 個授信戶的標準化資產報酬率 (standardized asset return) $X_{t,i}$ 僅受到單一系統因子 (systematic factor) S_t 與個別因子 (specific factor) $\varepsilon_{t,i}$ 影響，且 $X_{t,i}$ 可以表示為：

$$X_{t,i} = \sqrt{1-\rho} \varepsilon_{t,i} + \sqrt{\rho} S_t \quad (10)$$

其中 S_t 與 $\varepsilon_{t,i}$ 皆為獨立的隨機變數，並服從標準常態分配，且 S_t 與 $\varepsilon_{t,i}$ 互相獨立， ρ 為資產相關係數 (asset correlation)。令授信戶標準化資產報酬率低於門檻值 $\gamma_{t,i}$ 視為違約，定義違約指標函數 $Y_{t,i}$ 為：

$$Y_{t,i} = \begin{cases} 1, & \text{當 } X_{t,i} \leq \gamma_{t,i} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

假設在第 t 期相同評等的授信戶，擁有相同的真實違約機率 PD_t 、門檻值 γ_t 和資產相關係數 ρ 。因此可得到：

$$\begin{aligned} PD_t &= P(X_{t,i} \leq \gamma_t) \\ &= \Phi(\gamma_t) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 為標準常態分配之累積分配函數，此真實違約機率亦為非條件違約率 (unconditional PD)。而由 (12) 式可知：

$$\gamma_t = \Phi^{-1}(PD_t) \quad (13)$$

若 N_1, \dots, N_T 為時間點 $t = 1, \dots, T$ 的授信戶總數，且每年的授信戶違約總數分別為 D_1, \dots, D_T 。則第 t 年所觀察到的樣本違約率 d_t 為：

$$d_t = \frac{D_t}{N_t} \quad (14)$$

在觀察到系統因子 S_t 下，可推導出條件違約機率 (conditional PD) 為：

$$\begin{aligned} P(Y_{t,i} = 1 | S_t) &= P(X_{t,i} \leq \gamma_t | S_t) \\ &= P(\sqrt{1-\rho} \varepsilon_{t,i} + \sqrt{\rho} S_t \leq \gamma_t | S_t) \\ &= P\left(\varepsilon_{t,i} \leq \frac{\gamma_t - \sqrt{\rho} S_t}{\sqrt{1-\rho}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_t) - \sqrt{\rho} S_t}{\sqrt{1-\rho}}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

假設有 T 年的授信戶資料，每年授信戶之個數為 N_t 。第 t 年的系統因子以一個隨機變數 S_t 來表示。 S_t 小表示經濟情況不佳，大則表示經濟情況良好，而 S_t 假設具有獨立標準常態分配。模擬過程如下：

步驟1：產生具有獨立標準常態分配之亂數 S_1, \dots, S_T 。

步驟2：計算第 t 期的條件違約機率為：

$$p_t(S_t) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_t) - \sqrt{\rho} S_t}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (16)$$

其中 PD_t 為真實的非條件違約機率， ρ 為資產相關係數。

步驟 3：第 t 期的違約個數 D_t 服從二項分配，參數為 N_t 和 $p_t(S_t)$ ：

$$D_t \sim \text{Binomial}(N_t, p_t(S_t)) \quad (17)$$

而第 t 期的樣本違約機率為 $d_t = D_t / N_t$ 。

3.3 研究主題

本文主要關心違約機率校準工具的實證結果與穩健性，因此利用聯徵中心的資料進行下列主題的探討：

主題 1：利用 Normal test 和 Traffic lights test 進行違約機率校準的實證研究。檢定對象為聯徵中心內部評等系統的無財報非公開發行公司與營建業各評等。由於聯徵中心內部評等系統並不提供各評等的預測違約機率，且只有八年的歷史資料，為使預測違約機率是由足夠的歷史資料得到，及兼顧多期校準期數，因此各年預測違約機率取為前五年樣本違約機率的平均數，而違約機率校準期數為三年，時間為 2003 年至 2005 年。例如：2003 年的預測違

約機率取為 1998 年至 2002 年的樣本違約機率的平均數。同時本文亦將此相同之預測違約機率用於營建業作為對照，探討是否可將無財報非公開發行的預測違約機率直接運用在營建業上。

主題 2：利用 Blochwitz et al. (2004) 之模擬法，探討在不同的資產相關係數下，對違約機率校準工具 Normal test 和 Traffic lights test 的影響，及銀行和監理機關在使用 Normal test 和 Traffic lights test 時，應該注意的事項。

4. 違約機率校準之實證分析

4.1 評等預測違約機率校準

表 6 和表 7 為無財報非公開發行公司與營建業各評等利用 Normal test 與 Traffic lights test 檢定的 P-value。由於無財報非公開發行公司的評等 1 與評等 2 在 2002 年前，有些年度沒有授信相關的資料，因此評等 1 與評等 2 不進行檢定，表格中以“-”表示。為方便起見，在顯著水準分別為 0.05 與 0.01 下，P-value 小於 0.05 與 0.01 則分別以 * 與 ** 表示。

表 6 無財報非公開發行公司各評等之檢定 P-value

方法 \ 評等	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Normal	-	-	0.5263	0.2973	0.0108*	0.0082**	0.0180*	0.0000**	0.3178
Traffic lights	-	-	0.5375	0.2300	0.0046**	0.0103*	0.0013**	0.0013**	0.2300

表7 營建業各評等之檢定 P-value

方法 \ 評等	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Normal	-	-	0.1694	0.2904	0.7191	0.7462	0.6551	0.6831	0.5688
Traffic lights	-	-	0.1288	0.2300	0.6500	0.6500	0.5375	0.8750	0.3650

表6顯示若顯著水準取為0.05，則無財報非公開發行公司的評等5、6、7與8將會落入拒絕域。代表在這些評等下，利用五年歷史資料所估算的預測違約機率是不適當的。由圖3可知無財報非公開發行公司的樣本違約機率除了2001年最高外，其實是呈現逐年上升的趨勢，而這種現象在較差的評等表現的更明顯，使得利用歷史的樣本違約機率的平均當作預測違約機率無法有效的捕捉下一年的真實違約機率。而Normal test 與 Traffic lights test 的檢定結果也正確地反應出此現象，拒絕該預測違約機率為適切的。由於聯徵中心只擁有八年的歷史資料，其資料可能未涵蓋整個景氣循環，所以才會發生樣本違約機率逐年上升的情況。而只利用前五年樣本違約機率的平均作為預測違約機率，就容易發生偏誤，而國外一些評等公司擁有二、三十年的歷史資料，這也反應擁有長時間資料庫的重要性。

而將無財報非公開發行公司的預測違約機率運用在營建業上是否恰當，在顯著水準為0.05下，表7的結果顯示各評等都不拒絕虛無假設，表示無財報非公開發行公司的預測違約機率是可以作為營建業的預測違約機率。由於營建業是樣本違約機率

最高的產業，因此這個結果似乎與直覺相違背，其可能的原因是聯徵中心內部評等系統在給予公司的評等時，並未對產業進行區隔，而是對公司的財務資訊進行分析、給予評分，再依評分所落入的區間進行評等的劃分。意味著即使是不同產業的公司，只要在相同評等下，公司的違約機率可能相差不多。

4.2 資產相關係數對檢定力的影響

本節將探討在不同資產相關係數對違約機率校準方法 (Normal test 與 Traffic lights test) 的影響。一般檢定方法可能會發生兩種錯誤，型一錯誤 (Type I error) 與型二錯誤 (Type II error)。表8為型一與型二錯誤的定義：型一錯誤代表真實情況 H_0 為真，但檢定結果為拒絕 H_0 ；型二錯誤為真實情況 H_1 為真，檢定結果卻為接受 H_0 。型一錯誤意味著銀行使用足夠的預測違約機率，但違約機率校準的結果為判定預測違約機率不足，使得資本計提必須增加，導致銀行可用資本減少，因此型一錯誤為銀行所重視的錯誤。而型二錯誤表示銀行使用不足的預測違約機率，但校準的結果卻讓該預測違約機率通過檢定，使得銀行的資本計提其實為低估的，當違約事件發生時，所計

提的資本有可能無法涵蓋損失，此錯誤是監理機關所關心，因此型二錯誤為監理機關所重視的錯誤。

由於 Traffic lights test 假設授信戶之間的資產相關係數為 0，然而從歷史資料來看，授信戶間是具有資產相關性，另外

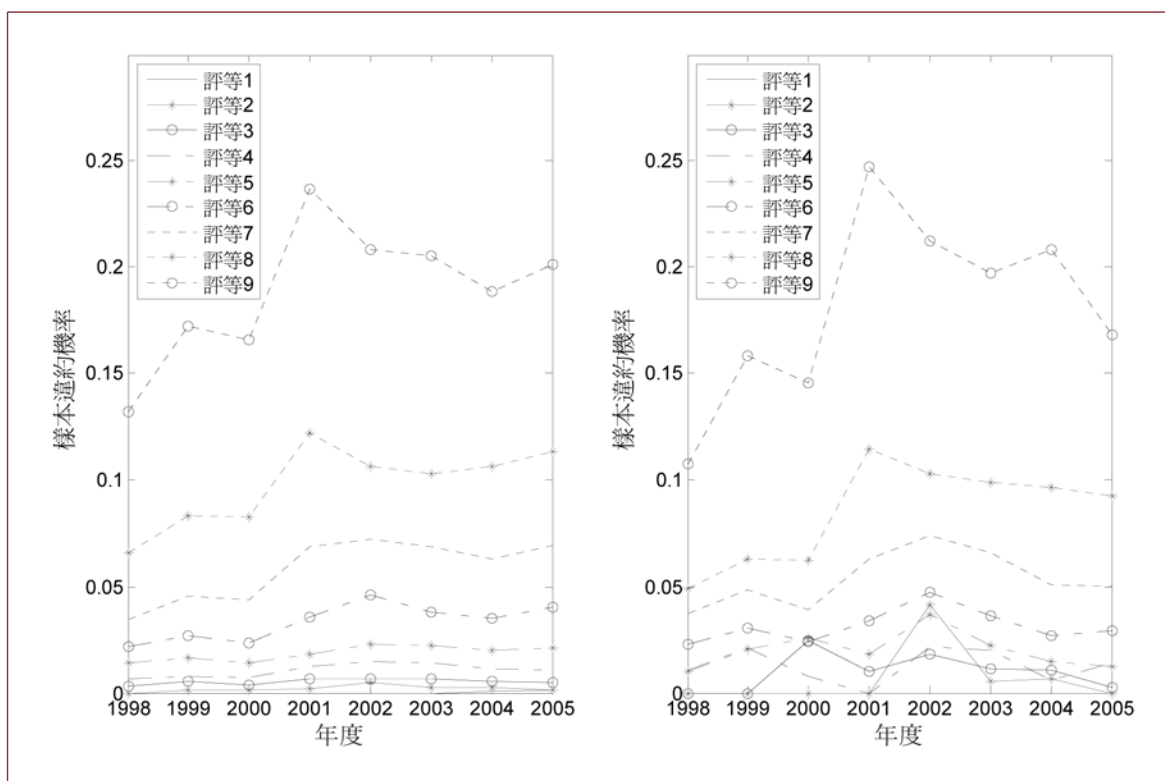


圖 3 無財報非公開發行公司 (左) 與營建業 (右) 各評等樣本違約機率

表 8 型一錯誤與型二錯誤

檢定結果	真實情況	$PD_t \leq PD_t^{(F)}$ (H_0 為真)	$PD_t > PD_t^{(F)}$ (H_1 為真)
	$PD_t \leq PD_t^{(F)}$ (不拒絕 H_0)		判斷正確
$PD_t > PD_t^{(F)}$ (拒絕 H_0)		型一錯誤	判斷正確

Normal test 雖然沒有假設授信戶之間彼此獨立，但其檢定統計並未考慮資產相關係數，因此本節將探討資產相關性對 Normal test 和 Traffic lights test 之型一錯誤機率和型二錯誤機率的影響。

由於真實的型一錯誤機率是一個無法觀察得到的參數，因此我們定義模擬的型一錯誤機率為：產生 10,000 次 H_0 為真的情境，計算 Normal test 與 Traffic lights test 拒絕 H_0 的次數，該拒絕 H_0 的機率即為模擬的型一錯誤機率。本文利用模擬的型一錯誤機率作為真實的型一錯誤機率的估計值。模擬的型二錯誤機率定義亦相似，產生 10,000 次 H_1 為真的情境，計算 Normal test 與 Traffic lights test 不拒絕 H_0 的次數，該不拒絕 H_0 的機率即為模擬的型二錯誤機率。

圖 4 為在宣稱的型一錯誤機率 (顯著水準) 為 0.05 下，無財報非公開發行公司的評等 5 之資產相關係數對型一錯誤機率的影響，其中預測違約機率之決定方式和 5.1 節相同，校準期數為三年由聯徵中心資料可知評等 5 之預測違約機率為 1.74%、1.90% 和 1.97%，模擬次數為 10,000 次。由於 Traffic lights test 之檢定統計量為離散分配，故在累積機率上並不會剛好等於 0.05 或是 0.1，因此宣稱的型一錯誤機率必須有所調整，例如表 1 中，當宣稱的型一錯誤機率為 0.05 時，真正的累積機率只有 0.044，因此宣稱的型一錯誤機率應調整為 0.044。

直覺上，一個良好的檢定方法，其模擬的型一錯誤機率應控制在宣稱的型一錯誤機率上。但由圖 4 發現 Normal test 與 Traffic lights test 當資產相關係數越大時，

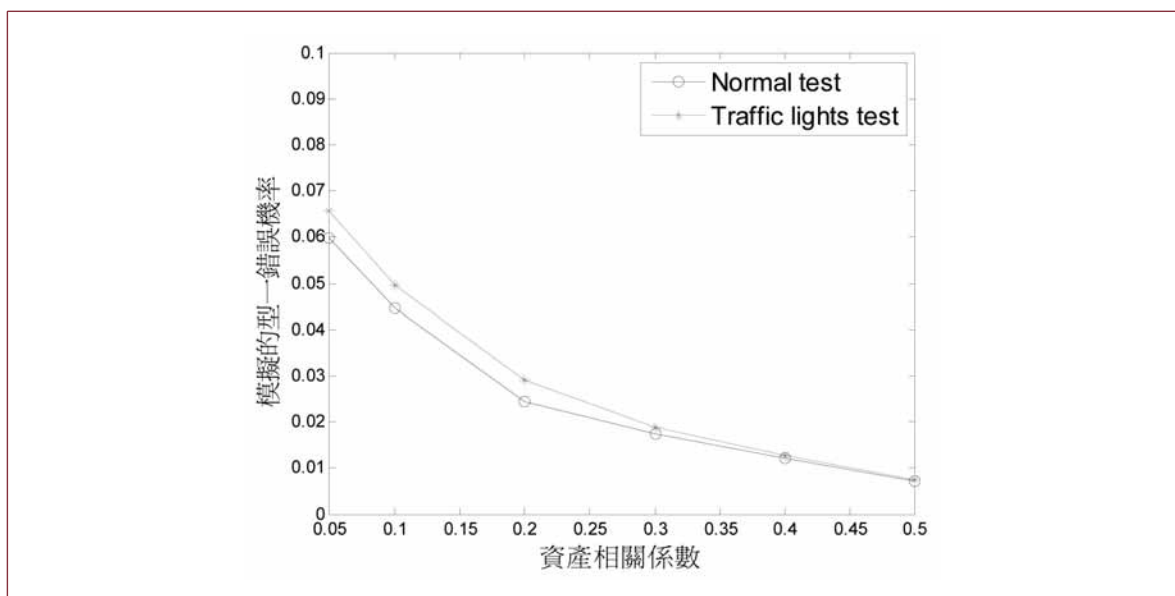


圖 4 資產相關係數對型一錯誤機率影響

模擬的型一錯誤機率會越低。意味著銀行使用足夠的預測違約機率，會被違約機率校準方法錯誤拒絕(使用足夠的預測違約機率，卻被判斷該預測違約機率不足)的機率會隨著資產相關係數增加而下降，也代表著違約機率校準方法隨著資產相關係數增加，其檢定力會下降。

Normal test 會產生誤差的原因是其檢定統計量運用中央極限定理，使得檢定統計量具有標準常態分配，因此校準期數要夠大。而本文的校準期數只有三年，校準期數不足是 Normal test 產生誤差的最主要的原因。而 Traffic lights test 產生誤差的原因是其方法是按照每期的樣本違約機率與預測違約機率的差距給予每期的燈號。由於在授信戶足夠多的情況下，各年的樣本

違約機率其實為條件違約機率，而我們使用的預測違約機率卻是非條件違約機率，因此資產相關係數對條件違約機率的影響便是 Traffic lights test 產生誤差的原因。圖 5 為在真實違約機率為 2% 下，不同的資產相關係數對樣本違約機率之機率密度函數(probability density function) 的影響³。從圖 5 可以發現假若銀行申報預測違約機率為 2%，由於真實違約機率亦為 2%，所以該預測違約機率是足夠的 (H_0 為真)，但隨著資產相關係數增加，發生樣本違約機率比預測違約機率高(如樣本違約機率發生在 2% ~ 4%) 的機會也會下降。因此銀行被會給予橘燈與紅燈的總機率會隨著資產相關係數增加而降低，使得檢定結果為拒絕 H_0 的機率也隨之下降。

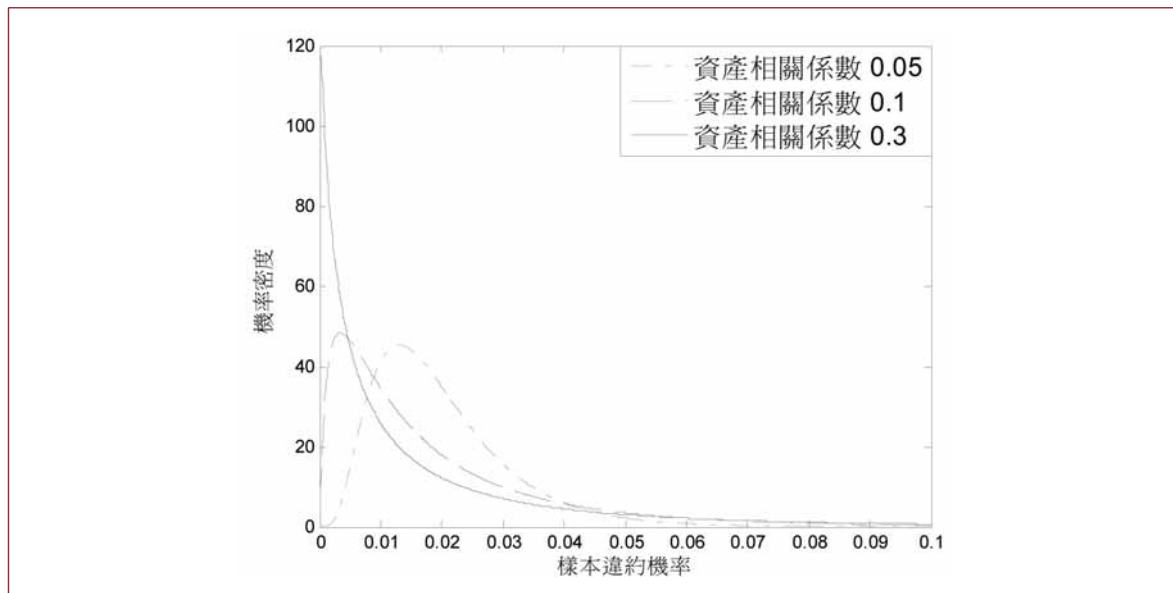


圖 5 資產相關係數對樣本違約機率之分配的影響

³ 理論推導見附錄 C。

此外，Normal test 的模擬的型一錯誤機率比 Traffic lights test 來的低，意味著 Normal test 拒絕足夠的預測違約機率的機率會比 Traffic lights test 來的小，因此對銀行而言應該是個較喜愛使用的方法。此部分的結果也與 Blochwitz et al. (2004) 相符合。

圖 6 為在顯著水準 0.2 與 0.05 下，研究主體為無財報非公開發行公司的評等 5，Normal test 與 Traffic lights test 模擬的型二錯誤機率。其中預測違約機率之決定方式和 5.1 節相同，校準期數為三年，由聯徵中心資料可知評等 5 之預測違約機率為 1.74%、1.90% 和 1.97%，模擬次數為

10000 次。定義 k 為：

$$k = \frac{\text{真實違約機率}}{\text{預測違約機率}} \quad (18)$$

型二錯誤機率代表著銀行使用不足的預測違約機率，卻沒有被校準方法判斷出來的機率。由圖 6 可知，隨著資產相關係數增加，模擬的型二錯誤機率也會變大。特別在採用較小的顯著水準時，型二錯誤機率會更大。意味著高資產相關係數的銀行即使採用不足的預測違約機率，但被校準方法辨別出來的機率是很低的，特別是使

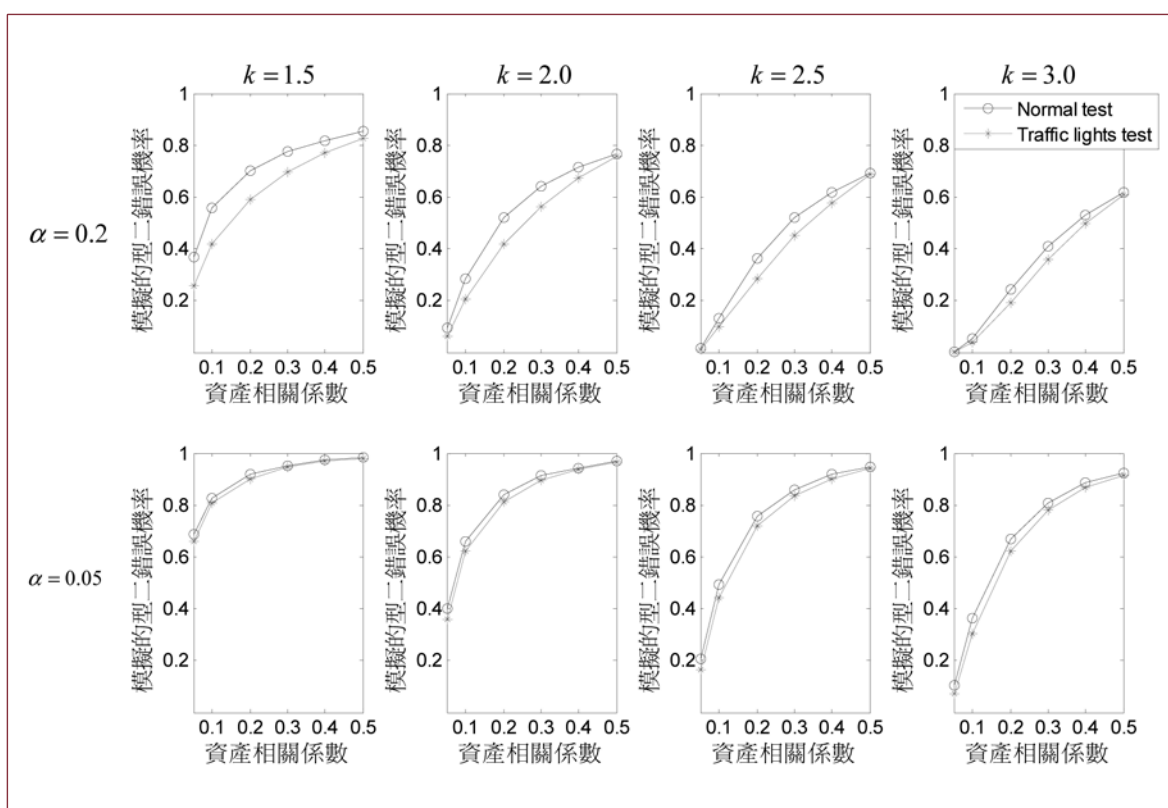


圖 6 資產相關係數對型二錯誤機率影響(評等 5)

用較小的顯著水準時，違約機率校準方法更無法正確區分預測違約機率與真實違約機率的差異。圖6也代表著違約機率校準方法隨著資產相關係數的增加，其檢定力是下降的。

在比例 k 較小情況下，由於預測違約機率與真實違約機率差異較不大，使得銀行計提的資本也不至於低估太多，因此發生問題時，情況比較不嚴重。而在比例 k 較大情況時，此時預測違約機率已嚴重低估，若因資產相關係數過大，使得校準方法讓嚴重不足的預測違約機率通過檢定，這才是較嚴重的情形。此外，採用一般統計上的顯著水準時 (5% 或 1%)，對監理機關是比較危險的，因為會讓校準方法讓不足的預測違約機率通過檢定的機率更高。

至於會產生如此高的模擬型二錯誤機率，其原因跟探討真實型一錯誤機率偏誤時大致相同。Normal test 檢定年數的不足是主要原因，而 Traffic lights test 則因資產相關係數與樣本違約機率分佈的影響，使得高資產相關係數的銀行，即使申報的預測違約機率是不足的，但校準的結果可能認定其不足的預測違約機率是合適的。

此外，Traffic lights test 的模擬的型二錯誤機率比 Normal test 來的低，意味著當在預測違約機率其實是不足的狀況下，Traffic lights test 能正確判斷出預測違約機率是不適切的能力比 Normal test 來的強，因此對監理機關而言，是個比較推薦的方法。此部分的結果也與 Blochwitz et al. (2004) 相同。

5. 結論與建議

本文主要利用 BCBS (2005) 所提供的 Normal test 與 Traffic lights test 進行實際應用以及利用模擬法探討不同資產相關係數對 Normal test 與 Traffic lights test 型一錯誤機率與型二錯誤機率的影響。實證資料為聯合徵信中心 1997 到 2004 評分年度的無財報非公開發行公司的授信戶資料與 1998 到 2005 評分年度無財報非公開發行公司的違約戶資料。實證結果顯示進行違約機率校準時，若在樣本違約機率逐年增加的情況下，預測違約機率無法反映未來真實違約機率的現象，Normal test 與 Traffic lights test 可以有效地捕捉且顯示其預測違約機率是不足的。

另外我們關心在不同的資產相關係數對 Normal test 與 Traffic lights test 檢定力的影響，發現隨著資產相關係數增加，違約機率校準方法的檢定力會降低。在型一錯誤機率上，Normal test 與 Traffic lights test 隨著資產相關係數越高，模擬的型一錯誤機率會越低。原因是 Normal test 利用中央極限定理，所以理論上校準的期數要夠長，才會使檢定統計量服從標準常態分配。因此校準年數的不足即是產生誤差的最大原因，若能拉長校準的期數，其效果應該會改善很多，因此擁有足夠的資料就成為了相當重要的關鍵。至於 Traffic lights test 則因方法本身的設計，在判斷燈號時並未考慮資產相關係數，因此隨著資產相關係數越大，偏誤越多。而監理機關關心的

型二錯誤機率則會隨著資產相關係數增加而升高，且在資產相關係數較大時，即使預測違約機率嚴重不足，校準方法仍有不小的機率會讓不足的預測違約機率通過檢定。

真實的型一錯誤機率會隨著資產相關係數增加而遞減，真實的型二錯誤機率隨著資產相關係數增加而上升，這種現象會使銀行與監理機關在進行違約機率校準時更重視資產相關係數的大小。資產相關係數越大的銀行，在景氣持平或是景氣熱絡時，樣本違約機率可能都很小；可是一旦景氣衰退或是蕭條時，授信戶同時違約的事件大量發生，使得銀行蒙受極大的損失或是資本計提不足，而且資產相關係數越大的銀行，就算使用不足的預測違約機率，但能從違約機率校準得到警告機會也越低，因此資產相關係數越大的銀行，其資本計提以及預測違約機率都應抱持更保守的態度。另外就監理機關而言，只看檢定的結果判斷銀行的預測違約機率是否適當是相當危險的，容易發生讓不足預測違約機率通過校準的情形，因此銀行擁有長時間的資料庫就有其重要性。因為擁有的長時間的資料可使預測違約機率的品質更為精良，其可信度在通過違約機率校準後也會比較高。此外，監理機關採用較高的顯著水準也可以降低讓不足預測違約機率通過校準的機率。

本文尚有許多可供繼續研究的方向，由於聯徵中心只擁有八年的歷史資料，相對於國外一些評等公司擁有二、三十年之

歷史資料，當未來有更長時間的資料及更良好的資料品質，應可提供更完整的分析。另一方面，由於資產相關係數對 Normal test 和 Traffic lights test 有很大的影響，因此未來可考慮修正 Normal test 和 Traffic lights test 的檢定統計量。此外，由於檢定方法之型一錯誤機率變小時會使型二錯誤機率增大，而型二錯誤機率變小時，亦會使型一錯誤機率變大，因此對不同立場 (重視型一或型二錯誤) 的驗證者而言，如何在之間找到一個平衡點或是建立具體的指標，代表型一與型二錯誤機率的比率，或是雙方承擔了多少的風險等，這亦是未來值得探討的主題。

附錄：樣本違約機率之理論分配

在單因子模型假設下，根據 Vasicek (1987) 的作法，在授信個數 N_t 夠大及觀察到景氣因子 S_t 下，依據大數法則，樣本違約機率 d_t 會趨近條件違約機率：

$$d_t \xrightarrow{N_t \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_t) - \sqrt{\rho} S_t}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (A1)$$

其中 PD_t 為真實違約機率， ρ 為資產相關係數。則樣本違約機率之累積分配函數 (cumulative density function) $F(x)$ 為：

$$\begin{aligned} F(x) &= P(d_t \leq x) \\ &\approx P\left(\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_t) - \sqrt{\rho} S_t}{\sqrt{1-\rho}}\right) \leq x\right) \\ &= P\left(S_t \geq \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left[\Phi^{-1}(PD_t) - \sqrt{1-\rho} \Phi^{-1}(x)\right]\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left[\Phi^{-1}(PD_t) - \sqrt{1-\rho} \Phi^{-1}(x)\right]\right) \quad (A2) \end{aligned}$$

因此樣本違約機率之機率密度函數為：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{dF(x)}{dx} \\ &= \phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left[\Phi^{-1}(PD_t) - \sqrt{1-\rho} \Phi^{-1}(x)\right]\right) \\ &\quad \times \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \times \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(x))} \quad (A3) \end{aligned}$$

其中 $\phi(\cdot)$ 代表標準常態機率密度函數。

參考文獻

- Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) (2004), "International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework," Consultative Document, Bank for International Settlements.
- Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) (2005), "Studies on The Validation of Internal Rating Systems," Working Paper, Bank for International Settlements.
- Blochwitz, S., S. Hohl and C.S. Wehn (2005), "Reconsidering Ratings," *Wilmott Magazine*, Vol.5, 60-69.
- Blochwitz, S., S. Hohl, D. Tasche, and C.S. Wehn (2004), "Validating Default Probabilities on Short Time Series," Working Paper, Federal Reserve Bank of Chicago.
- Gordy, M.B. (2003), "A Risk Factor Model Foundation for Rating Based Bank Capital Rules," *Journal of Financial Intermediation*, Vol.12(3), 199-232.
- Tasche, D. (2003), "A Traffic Lights Approach to PD Validation," Working Paper, Deutsche Bundesbank.
- Vasicek, O. (1987), "Probability of Loss on Loan Portfolio," Working Paper, KVM Corporation.